**Латинський квадрат**

**Означення. Латинським квадратом** порядку називають таке розміщення  різних елементів, кожен з яких повторений разів у рядках і стовпчиках квадрату, при якому кожний елемент зустрічається точно один раз у кожному рядку і кожному стовпчику.

Приклад трьох латинських квадратів 5 порядку



Латинський квадрат називають **стандартним**, якщо у першому рядку і в першому стовпчику символи виступають у загальноприйнятому порядку.

Два стандартні квадрати називають **спряженими**, якщо рядки одного є стовпчиками другого.

Латинський квадрат називають **симетричним**, якщо від зміни рядків на стовпчики він не зміниться. Перший з квадратів стандартний.

Два латинські квадрати називаються **ортогональними** якщо при накладанні кожний символ одного квадрата зустрічається з кожним символом другого квадрата точно один раз.

Другий і третій квадрати **ортогональні.**

Два ортогональні латинські квадрати один з яких заданий латинськими літерами, а другий грецькими, називається греко- латинським квадратом. Греко-латинський квадрат можна записати одним квадратом



Число латинських квадратів дуже швидко зростає з порядком . Це видно з наступної таблиці

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Порядок **латинського квадрату** | Число ортогональних латинських квадратів | Число стандартних латинських квадратів | Число латинських квадратів з одного стандартного | число всіх латинських квадратів |
| 2  3  4  5  6 | 0  2  3  4  0 | 1  1  4  56  94 08 | 2  12  144  2 880  86 400 | 2  12  576  161 280  812 850 200 |
| 7 | 6 | 16 942 080 | 3 628 800 | 61 479 419 904 000 |

**Випадковий експеримент за планом латинського квадрату**

Нехай деяка мінлива величина поділяється на груп за кожною з трьох ознак: . Отримаємо  класифікаційний підгруп.

Припустимо, що проводиться по-одному спостереженні в  класифікаційних підгрупах. Ці спостереження проводимо за планом навмання вибраному латинського квадрату порядку .

Позначимо через  спостереження в -ій групі за ознакою , в -ій групі за ознакою , і в -ій групі за ознакою .

Ці  спостережень розташуємо в  рядках і  стовпчиках, навмання вибраного латинського квадрату. Рядки характеризують групи ознаки , стовпчики-групи ознаки, а символи латинського квадрату характеризують групи ознаки . Наприклад, якщо випадковий експеримент проводиться за схемою латинського квадрату, то спостереження записуємо так:



Упорядковуємо за алфавітом



Позначимо через  середнє арифметичне -го рядка:

,

через  середнє арифметичне -го стовпчика утвореної матриці:

,

середнє арифметичне тих елементів вибірки, які мають *k*-й прояв ознаки :

наприклад 

Через  позначимо середнє арифметичне всіх спостережень

.

Повна мінливість всіх спостережень виражається рівністю



(яку можна представити як суму таких чотирьох девіацій)



. (1)

Доведення тотожністі (1) грунтується на тому, що

.

та тому, що сума відхилень вибіркових значень у групах від середнього

арифметичного відповідної групи дорівнює нулю. Зауважимо, що для обчислення

 потрібно вибрати з утвореної таблиці всі ті значення, які мають однакове значення *k* третього індекса (мають *k*-ий прояв ознаки *C*), додати їх і розділити на .

Таким чином тотожність (1) вказує на те, що повна девіація розкладається на чотири девіації: девіації між групами ознак , ,  і залишкової девіації. Аналіз квадратичних форм у тотожності (1) показує, що кількість ступенів вільності в ній така: лівої частини *d.f.=* , кожного з трьох перших членів правої частини *d.f.=*, останього – *d.f.*=.

Отже, ступені вільності доданків тотожності (1) самі утворюють тотожність:



Розділивши тотожність (1) на  отримаємо вираз повної варіанси у вигляді лінійної комбінації варіанс між групами ознак , , , відповідно, та залишкової варіанси:

.

Тут

, ;

,

, ,

.

Чотири останні варіанси є незміщеними і незалежними оцінками дисперсій нормальної генеральної сукупності. Тому для перевірки гіпотези однорідності про вплив факторів на генеральну сукупність можна застосувати відповідні статистики Фішера:

 , , .

Якщо гіпотеза про однорідність даних у класифікаційних групах істинна, тобто віповідний фактор не впливає на генеральну сукупність, то відповідна з цих статистик має розподіл Фішера з кількістю ступенів вільності . При обчисленнях проміжні результати зручно розмістити у таблиці.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Мінливість** | **Девіація** | **d. f.** | **Варіанса** |
| Між групами ознаки А |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| Між групами ознаки В |  |  |
|  |  |  |
| Між групами ознаки С |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| Залишкова |  |  |
|  |  |  |
| Повна |  |  | - |
|  |  |  |

Зазначимо, що варіансний аналіз за планом латинського квадрату є неповним трифакторним варіансним аналізом. Він вимагає в *m* разів менше спостережень, ніж у повному трифакторному варіансному аналізі і значно менше обчислень. Однак, при цьому всі три фактори повинні мати однакове число в *m* рівнів, та й при наявності взаємодій між факторами він може бути помилкови

**Приклад:**

Для оцінки впливу добрив на урожай ячменю статистична лабораторія Ротамстедської дослідної станції в Англії(1929 рік, керівник Рональд Фішер). провела експеримент методом латинського квадрата. При цьому п’ять сортів добрив (фактор *T*) були внесені на 25 ділянок землі за такою схемою:



У результаті цього експерименту отримали такі врожаї ячменю (в чвертях фунта на 1/40 акра) [22].

1 акр =40 арів=4046,86м2

Варіансним аналізом за схемою латинського квадратуа, вибраного в цьому експерименті, перевірити гіпотезу про вплив добрив на урожай ячменю.

Занесемо результати всіх проміжних обчислень у типову таблицю 2.

Таблиця 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Мінливість** | | **Девіація** | **d.f.** | **Варіанса** |
| Між рядками (А)  Між стовпчиками (B)  Між добривами (T)  Залишкова | | 5028,8  5954,8  2452,0  1306,4 | 4  4  4  12 | 1257,20  1488,70  613,00  108,87 |
| Повна | 14742,0 | | 24 | - |

Обчислимо емпіричне значення статистики Фішера фактора (*T*):

.

Виберемо рівень значущості . Тоді при кількості ступенів вільності  з таблиці (додаток 8) маємо .

Оскільки  то гіпотезу про те, що фактор *T* на генеральну сукупність не впливає, потрібно відхилити, тобто наведені результати експериментів дають підставу стверджувати при , що ці добрива суттєво впливають на урожайність ячменю.